

הסתברות

פרק 43 - קשרים בין התפלגותים מיוחדות

תוכן העניינים

- | | |
|----|--|
| 1. | התפלגות סכום התפלגותים פואסוניות בלתי תלויות |
| 5. | התפלגות סכום התפלגותים בinementיות בלתי תלויות |
| 8. | התפלגות מותנית בסכום התפלגותים פואסוניות בלתי תלויות |

התפלגות סכום התפלגיות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

. $X_i \sim P(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$: קיימות n התפלגיות פואסוניות בלתי תלויות זו בזו :

. $\sum_{i=1}^n X_i$ ניצור משתנה מקרי חדש שהוא סכום של n ההתפלגיות הללו :

. $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. משתנה חדש זה מתפלג גם הוא פואסוני עם פרמטר :

לściוכם, אם : $X_i \sim P(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ והמשתנים בלתי תלויים זה בזה,

. $\sum_{i=1}^n X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$ אז מתקיים :

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל ממתקים מייצר סוכריות גלי בזרם פואסוני. הסוכריות נוצרות בצלבים כתום, יrox, אדום וסגול. להלן טבלה אשר מציגה את תוחלת מספר הסוכריות שנוצרות בכל אחד מהצלבים בשנית יוצר במפעל. מספר הסוכריות שנוצרות בשניתו כלשהו בכל אחד מהצלבים בלתי תלוי במספר הסוכריות בצלבים האחרים.

צלע	תוחלת
כתום	4
ירוק	3
אדום	3
סגול	2

- מה ההסתברות שבשניתה כלשהו ייווצרו בדיק 14 סוכריות גלי במפעל?
- מה ההתפלגות של מספר סוכריות הגלי שמיוצרות בדקה כלשהי במפעל?
- מה ההסתברות שבשניתה כלשהו המפעל ייצור 3 סוכריות כתומות ו-8 סוכריות בצלבים אחרים?

תשובה :



$$\cdot P(T = 14) = e^{-12} \cdot \frac{12^{14}}{14!} = 0.0905 . \text{ נ.}$$

ב. $\sum_{j=1}^{60} T_j \sim P(12 \cdot 60 = 720)$, $T_j \sim P(12)$

$$\cdot P(X_1 = 4 \cap T = 8) = P\left(X_1 = 4 \cap \sum_{i=2}^4 X_i = 4\right) = P(X_1 = 4) \cdot P\left(\sum_{i=2}^4 X_i = 4\right) = \frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} \cdot \frac{e^{-8} \cdot 8^4}{4!} = 0.0112 . \text{ ג.}$$

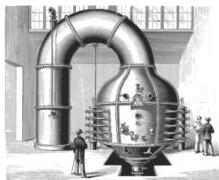
שאלות:

1) איזבלה היא רשות של חניות בגדים. לרשות שלוש חניות שהרכישות בהן נעשות בזרם פואסוני. בחנות A קצב הרכישות הוא 1 ל-10 דקות, בחנות B קצב הרכישות הוא 1 לשעה, ובוחנות C קצב הרכישות הוא 2 לארבע שעות. אין תלות בין מספרי הרכישות בחניות הרשות השונות.



- א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הרכישות בכלל
חניות הרשות בשבוע?
- ב. מה ההסתברות שבועה כלשהי מספר הרכישות בחניות
הרשות יהיה לכל היוטר 5?

2) במפעל פועלות שתי מכונות. מספר התקלות במכונה א' מתפלג פואסונית עם תוחלת של 2 תקלות ליום, ומספר התקלות במכונה ב' מתפלג פואסונית עם תוחלת של תקלה אחת ביום.



מספר התקלות במכונות השונות תלויים זה בזה.

- א. מה ההסתברות של מספר התקלות במפעל ביום?
ב. מה ההסתברות שביום מסויימים מסויימים כלל לא יהיו
תקלות במפעל?

ג. מה ההסתברות שביום מסויימים ייוו במפעל
בדיקות 5 תקלות, שמהן בדיקות 3 תקלות במכונה א'?

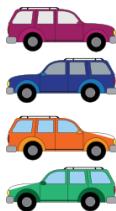
3) נתון ש- $X_i \sim P(1)$, $i = 1, 2, 3$. והמשתנים בלתי תלויים זה בזה.

$$\text{נגידר את } Y \text{ באופן הבא: } Y = \sum_{i=1}^3 X_i$$

א. מהי התוחלת ומהי השונות של Y ?

$$\text{ב. חשבו את: } E|Y - 2|$$

4) צומת כניסה מכוניות מ-3 כיוונים שונים. מספר המכוניות הנכנסות מכיוון i הוא משתנה מקרי שמתפלג פואסונית עם פרמטר i מכוניות לשעה כ- $i = 1, 2, 3$. אין תלות בין מספרי המכוניות המגיעות לצומת מכיוונים שונים. W הוא משתנה מקרי שמייצג את מספר המכוניות המגיעות לצומת בשעה שלושת הכוונים יחד.



א. חשבו את: $P(W = k | W > 0)$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

$$\text{ב. חשבו את: } \cdot E\left(\frac{1}{1+W}\right)$$

5) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכחו שאם : $X_2 \sim P(\lambda_2)$ ו- $X_1 \sim P(\lambda_1)$ והמשתנים בלתי תלויים זה

בזה, אז מתקיים : $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

ב. הוכחו שאם : $X_i \sim P(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ והמשתנים בלתי תלויים זה

$$\text{בזה, אז מתקיים : } \sum_{i=1}^n X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת : 15, סטיית תקן : $\sqrt{15}$. ב. 0.0028 .

2) א. פואסונית עם פרמטר 3 . ב. 0.0025 . ג. 0.0529 .

3) א. תוחלת : 3, שונות : 3 . ב. $\frac{10}{e^3} + 1$. ג.

4) א. $\frac{e^{-6} \cdot (e^6 - 1)}{6} \cdot \frac{e^{-6} \cdot 6^k}{k! \cdot (1 - e^{-6})}$. ב.

5) שאלת הוכחה.

התפלגות סכום התפלגיות בינהוות בלתי תלויות:

רקע:

אם יש כמה משתנים מקרים בלתי תלויים זה בזה שלכל אחד מהם התפלגות בינהוות עם אותו פרמטר k , סכום המשתנים יתפלג בינהוות עם פרמטר k .
באופן יותר מפורט:

אם X_i הוא משתנה מקרי שמתפלג בינהוות עם הפרמטרים (p_i) לכל: $i = 1, 2, \dots, m$
והמשתנים בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^m X_i$ הוא משתנה מקרי בינהוות עם $\left(\sum_{i=1}^m p_i \right)$:
הפרמטרים:

דוגמה:



ערן מטיל קובייה ארבע פעמים, ודינה מטילה קובייה פעמיים.
מהי התפלגות מספר הפעמים שבון ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3?
מהי תוחלת מספר הפעמים שבון ערן ודינה קיבלו תוצאה קטנה מ-3?

תשובה:
ב'ית

$$X_1 \sim B\left(n_1 = 4, P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\right) \quad \text{- מספר הפעמים שערן קיבלת פחות מ-3.}$$

$$X_2 \sim B\left(n_2 = 2, P = \frac{1}{3}\right) \quad \text{- מספר הפעמים שדינה קיבלה פחות מ-3.}$$

$$X_1 + X_2 \sim B\left(n = 4 + 2 = 6, P = \frac{1}{3}\right)$$

$$X \sim B(n, p) \Rightarrow E(x) = n \cdot P$$

$$E(X_1 + X_2) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

שאלות:

- 1) יוסי מטבב ארבע פעמים, ודנה מטילה מטבב שש פעמים.
 אם X הוא סך הפעמים שיוסי ודנה יקבלו עץ.

א. מה ההסתברות של X ?

ב. מה התוחלת ומה השונות של X ?

- 2) ב מבחון שני חלקים. חלק א' כולל 10 שאלות עם 4 תשובות אפשריות ש רק אחת מהן נכונה. חלק ב' כולל 10 שאלות מסווג נכון או לא נכון.

סטודנט ניגש לבחינה ומניחש את כל התשובות בבחירה.

א. מה ההסתברות שהסטודנט יענה נכון לכל היוטר על 3 שאלות?

ב. מה התוחלת ומה השונות של מספר התשובות הנכונות בבחירה של הסטודנט?



- 3) רונן הזמין למסיבת יום הולדת שלו 18 אורחים – 10 גברים ו-8 נשים. כל גבר הגיע למסיבת הסתברות 0.7, וכל אישה הגיע למסיבת הסתברות 0.9. ידוע שאין תלות בין הגעת גבר אחד להגעתו של גבר אחר, בין הגעת אישה אחת להגעתה של אחרת ובין הגעת גבר להגעתה של אישה.



א. מה ההסתברות שיגיעו למסיבת בדיקות 9 גברים ו-8 נשים?

ב. מה הסיכוי שיגיעו למסיבת לפחות 17 אורחים?

- 4) נתון ש: $(X \sim B(2,0.5), Y \sim B(3,0.6))$. ידוע ש- X ו- Y בלתי תלויים זה זהה.

א. מצאו את ההסתברות של $X + Y$.

ב. מצאו את: $P(X + Y = 2 | X > 0)$.

- 5) נתון ש- X ו- Y הם משתנים מקרים בלתי-תלויים. X מתפלגBINOMIALLY עם הפרמטרים n , p ו- Y מתפלגBINOMIALLY עם הפרמטרים m ו- p .

האם גם המשתנים המקרים X ו- $Y = X + W$ בלתי-תלויים זה זהה?

- 6) X ו- Y הם משתנים מקרים בלתי-תלויים. X מתפלגBINOMIALLY עם

הפרמטרים n_x , p ו- Y מתפלגBINOMIALLY עם הפרמטרים n_y ו- p .

הוכיחו ש- $X + Y$ מתפלגBINOMIALLY עם הפרמטרים: $n_x + n_y$ ו- p .

תשובות סופיות:

- . $E(X) = 5$, $V(X) = 2.5$. **1**
2. תוחלת : 7.5 , שונות : 4.375
3. 0.0751
4. 0.2133
5. א. עין בסרטון הוידאו.
6. המשתנים תלויים.
7. שאלת הוכחה.

התפלגות מותנית בסכום התפלגויות פואסוניות בלתי תלויות:

רקע:

אם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים פואסוניים עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 בהתאם, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X

$$\text{בහינתן } n = X + Y \text{ היא ביןומית עם הפרמטרים } n \text{ ו- } \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

דוגמה:



מספר בני האדם הנכנסים לבית קפה מסוים בשעה מתפלג פואסוני עם ממוצע 6. מספר הכלבים הנכנסים לבית הקפה בשעה מתפלג פואסוני עם שונות 1. נניח שאין תלות בין השניים.

מה הסיכוי שבעה האחזרה נכנסו לבית הקפה בבדיקה שני כלבים, אם ידוע שבסך הכל נכנסו שבעה בני אדם וכלבים?

תשובה:

$$(X \sim P(\lambda_1 = 1) - \text{מספר הכלבים הנכנסים בשעה.})$$

$$(Y \sim P(\lambda_2 = 6) - \text{מספר בני האדם הנכנסים בשעה.})$$

ת. X, Y ב"ת.

$$X \sim P(\lambda_1)$$

$$Y \sim P(\lambda_2)$$

⇓

$$X | X + Y = n \sim B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$$

$$X | X + Y = 7 \sim B\left(7, \frac{1}{7}\right)$$

$$P(X = 2 | X + Y = 7) = \binom{7}{2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^5 = 0.1983$$

שאלות:

1) מספר הפסיקות החשמל היוזמות במפעל זורקס מתפלג פואסונית עם תוחלת של 2 בחודש. מספר הפסיקות החשמל اللا-יוזמות במפעל מתפלג פואסונית עם תוחלת של 3 בחודש. מספר הימים בחודש כלשהו זה נич. אין תלות בין מספר הפסיקות היוזמות למספר הפסיקות שאין יוזמות.



א. מה הסיכוי שברביעון הראשון של השנה יהיו בדיק 5 הפסיקות חשמל במפעל וגם שבחודש ינואר של אותה שנה תהיה בדיקת הפסקה אחרת?

ב. מהי התוחלת של מספר החודשים שייעברו מינואר 2020 ועד החודש הראשון שבו לא יהיו כלל הפסיקות חשמל?

ג. אם בחודש מרץ הבא יהיו בדיק 6 הפסיקות חשמל במפעל זורקס, מה התוחלת של מספר הפסיקות היוזמות שייהיו באותו החודש?

2) מספר המכירות המתרחשות בשעה בבדיקות הצעכועים טויזים מתפלג פואסונית עם תוחלת של 6 בשעה. הבדיקות פתוחה בכל יום במשך שמונה שעות, מהשעה 00:11.



א. מה ההסתברות שבשעה מסוימת יהיו לפחות 3 מכירות בבדיקות הצעכועים טויזים?

ב. מה ההסתברות שבשעה הראשונה שלאחר פתיחת הבדיקות יהיו 4 מכירות, אם באותו היום יהיו בסך הכל 50 מכירות?

ג. בכל יום מנהל הבדיקות מקבל דוח ובו פירוט של מספר הרכישות שהיו בכל שעיה שלמה מאז פתיחת הבדיקות. מה ההסתברות שמהר שטוחה השעות שבהן הבדיקות פתוחה, תהיה בדיק שעה אחת שבה יהיו בדיק 5 רכישות?

3) מספר הגברים המגיעים לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה מתפלג פואסונית בקצב של 2 לשעה. מספר הנשים המגיעים לטיפול באותו חדר מיון מתפלג פואסונית בקצב של 1 לשעה. אין תלות בין מספר הגברים המגיעים לחדר המיון ובין מספר הנשים המגיעות אליו.



א. מה ההסתברות שבשעה מסוימת יגיע לפחות אדם אחד לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה?

ב. אם בשעה מסוימת הגיעו לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה בדיק 5 אנשים, מה ההסתברות שמתוכם יש בדיק 2 נשים?

ג. אם ביום מה מסוימת הגיעו לטיפול בחדר המיון של בית החולים סורוקה בדיק 60 אנשים, מהי השונות של מספר הגברים שהגיעו לטיפול בחדר המיון באותו היום?

(4) בסנייף דואר מסויים יש שלושה אשנבים (1, 2 ו-3). מספר האנשים הפונים לאשנב 1 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסוני עם הפרמטר 2, מספר האנשים הפונים לאשנב 2 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסוני עם הפרמטר 3, ומספר האנשים הפונים לאשנב 3 במשך דקה הוא משתנה מקרי המתפלג פואסוני עם הפרמטר 4.



אין תלות בין מספרי האנשים הנכנסים לסנייף בדקות שונות, ואין תלות בין מספרי האנשים שפונים לאשנבים השונים.

כל אדם שנכנס לסנייף הדואר פונה בהכרח לאחד מן האשנבים.

א. מהי ההסתברות שבין 00:00 ל-01:00 ייכנסו תשעה אנשים לסנייף הדואר?

ב. אם ידוע שבין 00:00 ל-01:00 ניכנסו תשעה אנשים לסנייף הדואר, מהי ההסתברות שלושה מהם פנו לאשנב 1?

ג. אם ידוע שבין 00:00 ל-01:00 ניכנסו לשנייף הדואר שלושה אנשים שפנו לאשנב 1, מהי ההסתברות שבסך הכל ניכנסו לשנייף הדואר באותו הבדיקה תשעה אנשים?

(5) הוכיחו את הטענה שאם X ו- Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים המתפלגים פואסונית עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 בהתאם, אז ההתפלגות של המשתנה המקרי המותנה X , בהינתן $n = X + Y = n$, היא בינומית עם הפרמטרים n ו- $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

(6) X_1, X_2, \dots, X_{100} הם משתנים מקריים בלתי-תלויים. נניח כי לכל: $i = 1, \dots, 100$ ההתפלגות של המשתנה המקרי X_i היא פואסונית

$$\text{עם הפרמטר } \frac{i}{50}.$$

א. מצאו את ההתפלגות המותנתה של $X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$ בתנאי ש: $n = \sum_{i=1}^{100} X_i = n$.

ב. מצאו את ההתפלגות המותנתה של X_{100} בתנאי ש: $n = \sum_{i=1}^{100} X_i = n$.

תשובות סופיות:

$$\text{.2.4. ג. } .148.4 \quad \text{ב. } .0.1209 \quad \text{א. } .0.0946 \quad (1)$$

$$\text{.0.3772 ג. } .13\frac{1}{3} \quad \text{ב. } \frac{80}{243} \quad \text{א. } .0.938 \quad (2)$$

$$\text{.13}\frac{1}{3} \text{ ג. } .0.149 \quad \text{ב. } .0.2041 \quad \text{א. } .0.9502 \quad (3)$$

$$\text{.0.149 ג. } .0.2041 \quad \text{ב. } .0.1318 \quad \text{א. } \text{ שאלה הוכחה.} \quad (4)$$

$$\cdot B\left(n, \frac{2}{101}\right) \cdot \text{ ב. } \cdot \frac{e^{-99} \cdot 99^{k-n}}{(k-n)!} \quad k \geq n \quad \text{א. } (6)$$